H. Grassmann, 28. Dezember 2011: **Variationen zum Eigenwertproblem**

1. Der Fall von 2×2-Matrzen ist leicht zu überblicken: Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
Wenn A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, so ist A diagonalisierbar.

   Wir untersuchen also Matrizen mit doppeltem Eigenwert, etwa dem Wert 1; deren charakteristisches Poynom ist also gleich
$$z^2 - (a+d)z + ad - bc = z^2 - 2z + 1,$$
also muß $a + d = 2,\ d = 2 - a$ und $a(2-a) - bc = 1$ sein, d.h. $a^2 - 2a + bc + 1 = 0$. Wenn wir uns für $a = 1 + \sqrt{-bc}$ entscheiden (d ist dann die andere Lösung), so ist
$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-bc} & b \\ c & 1-\sqrt{-bc} \end{pmatrix}.$$
Der Rang von
$$A - E = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$
ist nur gleich 0, wenn $b = c = 0$ ist, sonst ist er gleich 1, dann ist A also nicht diagonalisierbar. Der Eigenraum wird für $b \neq 0$ durch $\begin{pmatrix} -b \\ \sqrt{-bc} \end{pmatrix}$ erzeugt, sonst durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die einizige diagonalisierbare Matrix mit doppeltem Eigenwert 1 ist E.

2. Wenden wir uns 3×3-Matrizen zu. Wir betrachten die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 9 \\ 3 & -1 & 3 \\ -7 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$
Deren charakteristisches Polynom ist
$$c_A(z) = -z^3 + z^2 + 2z$$
mit den Nullstellen $0,\ 2,\ -1$. Als Eigenvektoren finden wir
$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix},\ v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Wenn wir diese Vektoren als Spalten in die Matrix X schreiben, so gilt
$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Wie sieht es mit der Matrix A^T aus, sie hat ja dasselbe charakteristische Polynom wie A? Hier finden wir als Eigenvektoren

$$w_0 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ -1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ w_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Gibt es da Zusammenhänge?

4. Ja, denn aus

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

   folgt ja

$$X^T A^T (X^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

   d.h. die Spalten von $(X^{-1})^T$ sind Eigenvektoren von A^T. Damit haben wir mit den obigen w-Vektoren die Zeilen von X^{-1} berechnet.

   Ist das ein neues Verfahren zur Matrixinvertierung? Wohl nicht, denn man müßte zu gegebenem X eine Matrix A finden, zu der es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

   Außerdem ist ja wohl X^{-1} eindeutig bestimmt, die Eigenvektoren sind es aber nicht; um oben die „richtigen“ w-Vektoren zu erhalten, wurde ein bißchen geschummelt.

5. Das führt uns zunächst mal zu der Frage, ob wir zu vorgegebenen Eigenwerten eine Matrix (außer der entsprechenden Diagonalmatrix) finden können.

   Wir probieren einfach mal was aus: Die Zahlen a, b, c sind gegeben, wir berechnen das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{vmatrix} a-z & b & c \\ -1 & -z & 0 \\ 0 & -1 & -z \end{vmatrix} = -z^3 + az^2 - bz + c.$$

   Wir finden also schon mal zu einem vorgegebenem Polynom eine Matrix mit diesem Polynom als charakteristischem.

6. Wir wollen nun eine Matrix mit den Eigenwerten $1, 1, a$ bestimmen und sehen, ob wir eine Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren der Matrix und ihrer transponierten finden.

Es gilt
$$-(z-1)^2(z-a) = -z^3 + (a+2)z^2 - (2a+1)z + a,$$
mit dem obigen Ansatz führt uns das zu der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 2a+1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Der Eigenräume zu den Eigenwerten 1 bzw. a werden durch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a^2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Wir ergänzen diese Vektoren willkührlich zu einer Basis und schreiben diese als Spalten in die Matrix
$$X = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Natürlich kann $X^{-1}AX$ keine Diagonalmatrix sein, denn die dritte Spalte ist ja kein Eigenvektor.

7. Wir haben über a nichts vorausgesetzt, wollen aber nun X^{-1} berechnen. Es ist $\det(X) = a^2 - a$, dies sollte nicht Null sein, aber mehr brauchen wir nicht.

   Zu Invertierung von X ist das Verfahren $(XE) \to (EX^{-1})$ ungeeignet; wir nutzen die Formel
$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \left((-1)^{k+j}\ \det(X_{kj})\right)^T.$$
   Mit naheliegenden Bezeichnungen erhalten wir

   $D_{11} = -a,\ D_{12} = -1,\ D_{13} = -1 + a,$

   $D_{21} = a^2,\ D_{22} = 1,\ D_{23} = 1 - a^2,$

   $D_{31} = 0,\ D_{32} = 0,\ D_{33} = -a + a^2$

   und unter Berücksichtigung der richtigen Vorzeichen erhalten wir
$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 - a} \begin{pmatrix} -a & -a^2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & a^2-a \end{pmatrix}.$$

8. Damit ergibt sich
$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{-a^2}{a^2-a}\right) \\ 0 & a & \left(\frac{a}{a^2-a}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Schauen wir uns noch die Sonderfälle an:

(a) Wenn $a = 0$ ist, so haben wir als dritten Vektor einen ungeeigneten gewählt; wenn wir statt e_3 lieber e_2 nehmen würden, so hätte die fragliche Determinante den Wert $a^2 - 1$, es bliebe also nur der andere Sonderfall, wir müßten aber alle Rechnungen nochmal machen.

(b) Wenn $a = 1$ ist, so wäre 1 ein dreifacher Eigenwert, der Eigenraum aber – wie oben – nur eindimensional. In der Matrix X wäre also nur die erste Spalte brauchbar, geeignete Ergänzungen zu finden, ist schwierig.

Offen bleibt noch die Frage, ob denn aus den Spalten von $(X^{-1})^T$ Eigenvektoren von A^T abzulesen sind. Daß man sich in einer Sackgasse befindet, merkt man erst, wenn man an ihrem Ende angelangt ist.

9. Und schließlich bleibt die Frage, wie es denn für Matrizen aussieht, die einen doppelten Eigenwert haben, der aber nicht (wie bei uns) gleich 1 ist.