Prof. Gavril Farkas
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 401

Übungsblatt 6

Lineare Algebra und analytische Geometrie I- W 2008-2009

Abgabe 03.12.2008

Aufgabe 1
Es sei $d \in \mathbb{N}$ eine wurzelfreie Zahl (d.h. es gibt keine $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = d$), und

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Für jedes $a_1 + b_1\sqrt{d}$ und $a_2 + b_2\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ist die Verknüpfung $\oplus$ durch

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{d}$$

gegeben. Die Verknüpfung $\odot$ ist durch

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) \odot (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1a_2 + db_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{d}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ mit diesen Verknüpfungen einen Körper bildet.

Aufgabe 2
θ sei eine reelle Zahl.

a) Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.$$

b) Zeigen Sie: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{-1} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

c) Rechnen Sie: $(1 + i\sqrt{3})^6$.

d) Beweisen Sie mit Hilfe von a):

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

Aufgabe 3
Sei $z_0 \in K$, wobei K ein beliebeger Körper ist.

a) Es sei $c \in K$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(z - z_0)|c(z^k - z_0^k)$ (d.h. es existiert ein Polynom $q(z) \in K[z]$ mit $c(z^k - z_0^k) = (z - z_0)q(z)$).

b) Sei $P(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass $(z - z_0)|(P(z) - P(z_0))$. Leiten sie aus $P(z_0) = 0$ die Eigenschaft $(z - z_0)|P(z)$ ab.

c) Sei $P(z) \in K[z]$ ein Polynom mit Grad n und n verschiedenen Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Zeigen Sie:

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

für irgendeine $c \in \mathbb{C}$.

d) Hat das Polynom $z^3 - 3 \in K[z]$ eine Zerlegung als linearen Faktoren falls $K = \mathbb{Q}$? Falls $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ (c.f. Aufgabe 2)? Begründen Sie bitte ihre Anwort.

Aufgabe 4
Sei

$$l_1 = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : a_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty\},$$

und seien $+ : l_1 \times l_1 \to l_1$ und $\cdot : \mathbb{R} \times l_1 \to l_1$ die Verknüpfungen, die durch

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots)$$
$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \ldots)$$

gegeben sind.

Zeigen Sie, dass $(l_1, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}-$Vektorraum bildet.