Prof. G. Farkas
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 401

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2008/2009

Abgabe 12.11.2008

Aufgabe 1
Für $a \in \mathbb{N}$ *Quadrat-frei*, d.h. es existiert kein $b \in \mathbb{N}$ mit $b^2 = a$, sei

$$\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^\times = \{x + y\sqrt{a} : x, y \in \mathbb{Q}\} - \{0\}.$$

Man definiert eine Verknüpfung $* : \mathbb{Q}[\sqrt{a}]^\times \times \mathbb{Q}[\sqrt{a}]^\times \to \mathbb{Q}[\sqrt{a}]^\times$ durch

$$(x_1 + y_1\sqrt{a}) * (x_2 + y_2\sqrt{a} = (x_1x_2) + (y_1y_2)a + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{a}.$$

Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{a}]^\times), *)$ eine Gruppe ist. 10

Aufgabe 2
Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft $a^2 = b^2 = (ab)^2$ für alle $a, b \in G$. Zeigen Sie, dass $a^4 = b^4 = (ab)^2$. Begründen Sie die Lösungsschritte! 10

Aufgabe 3
Seien m, n teilerfremde natürliche Zahlen. Finden Sie einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/(mn\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$. Bitte begründen Sie ihre Antwort! 10

Aufgabe 4
Sei G eine Gruppe, seien $x, y \in G$, und sei $e \in G$ das neutrales Element. Falls $x^2 = e$ und $xyx = y^3$, zeigen Sie, dass $y^8 = e$. 10

40